

# MEDIÇÃO DA CONSTANTE DE ELASTICIDADE ATRAVÉS DE UM SISTEMA MASSA-MOLA EM UM PLANO INCLINADO

Gustavo A. Costa<sup>1</sup>

Universidade Federal de Campina Grande Centro de Educação e Saúde – CES - Campus  
Cuité, Av. Olho D'Água da Bica, S/N, Cuité - Paraíba – Brasil.

## RESUMO

**RESUMO:** O oscilador tem um campo bem amplo de conhecimento. Analisando um movimento harmônico simples ou MHS com auxílio no modelo matemático proposto pela lei de Hooke, foi observado tal movimento com seis (6) massas diferentes e posto em um plano inclinado. Ao observarmos a variação do experimento com as diferentes massas é possível observar o valor da constante elástica. Foi feita uma linearização para obtermos os gráficos da oscilação e do ponto de equilíbrio, tais resultados foram alcançados com substituições sucintas das equações apresentadas nesse artigo.

**Palavras-chave:** oscilador; MHS; lei de Hooke; constante elástica.

*Measuring the elasticity constant through a mass-spring system on an inclined plane*

**SUMMARY:** The oscillator has a very wide field of knowledge. Analyzing a simple or MHS harmonic movement with aid in the mathematical model proposed by Hooke's law, it was observed such a movement with six (6) different masses and put on an inclined plane. When we observe a variation do experimental with how different masses it is possible to observe the value of the elastic constant. It was fact a linearization to get the graphs of the oscillation and the equilibrium point, such results out of achieved with succinct substitutions of the equations presented in that article.

**Key words:** oscillator; Hooke's law; Mhs; Elastic constant.

# INTRODUÇÃO

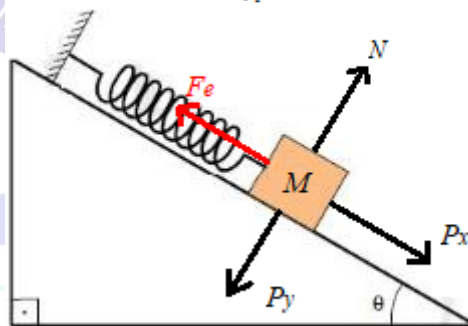
O oscilador é um dos fenômenos de grande importância para física, segundo Moyses o oscilador corresponde a vibrações localizadas, associada à propagação em vários tipos de campos da Física. Dito isso, temos o oscilador harmônico simples (OHS) que consiste em um sistema em que não há forças externas, e quando tirado de sua posição de equilíbrio, existe uma força restauradora  $F_e$  proporcional ao deslocamento  $x$  conhecida como Lei de Hooke, força dada por (Halliday *et al.*, 2009) como mostra a equação abaixo:

$$F_e = -Kx \text{ (Lei de Hooke)}$$

Ao saber as características de um OHS podemos descrever o seu movimento. O movimento harmônico simples (MHS), contendo as características do OHS. Analisando um experimento massa-mola posto em um plano inclinado (inclinação  $\alpha$ ) de modo que não existam forças externas, podemos caracterizar como um MHS.

Neste experimento temos um carrinho preso a uma mola sobre um plano inclinado (inclinação  $\alpha = 15^\circ$ ) onde o carrinho com massa  $M_c$  tem uma força peso ( $P$  que já esta decomposta na figura) atuando sobre a mola gerando assim uma deformação na mola de forma que a mola se torne uma força restauradora ( $F_e$ ), ou seja, lei de Hooke como já foi apresentada. A figura 1 apresenta o diagrama de corpo livre para uma melhor compreensão do experimento.

Figural: Sistema massa mola em um plano inclinado com inclinação  $\alpha$ .



Fonte: Autoria própria (2018)

Investigando o sistema massa mola apresentado na figura 1, utilizamos a segunda lei de Newton dada por (Halliday *et al.*, 2009) em conjunto com as demais forças presentes no sistema. Importante ressaltar que o experimento foi realizado em um trilho de ar, desprezando a força de atrito no sistema.

$$\sum F = ma \text{ (segunda lei de Newton)}$$

De acordo com cada eixo de um sistema cartesiano posto na figura 1 indiscretamente tem se as equações do movimento para cada eixo. Assim,

Eixo y:

$$P_y - N = ma_y \text{ (} a_y = 0 \text{)}$$

$$P_y = N$$

Eixo x:

$$P_x - F_e = ma_x$$

$$(P.Sen\alpha) - K(x-x_e) = ma_x$$

Sabendo que  $P_x = P.Sen\alpha$  é obtido por meio da decomposição vetorial da força peso do bloco (utilizando um triângulo retângulo). Deve-se ter conhecimento da teoria do oscilador harmônico simples (OHS) e suas equações do movimento, velocidade e aceleração, respectivamente:

$$x(t) = \tilde{x} + A.Sen(\omega t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = \omega A.Cos(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A.Sen(\omega t + \phi), \text{ os pontos em cima do } x$$

simboliza o nível de derivação,  $x_e$  é o ponto de equilíbrio e  $\tilde{x}$  é o novo ponto de equilíbrio gerado pelo deslocamento do carrinho, temos também a frequência angular  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  e  $\omega = 2\pi f$  ( $f$  é a frequência) com  $f$  inversamente proporcional ao período  $T$ . Daí,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

É notável que possamos calcular a constante elástica  $K$  utilizando a equação do período  $T$ , porem será analisado de outra forma, mas os valores para  $K$  não mudaram, até porque a mola é a mesma. Dessa forma, tendo em vista esses conhecimentos, iremos substituir a equações do OHS (movimento e aceleração) na equação encontrada do eixo  $x$ , como é apresentado em vermelho:

$$P_x - K(\tilde{x} + A.Sen(\omega t + \phi) - x_e) = -\omega^2 A.Sen(\omega t + \phi)m$$

Resolvendo essa EDO, sabemos que os elementos correspondentes de cada lado devem ser iguais, tudo que tem seno tem que ser igual a o que tem seno, o que não tem seno tem que ser igual ao que não tem seno, dessa forma a equação se divide em dois termos:

Termo um:

$$-KA = -\omega^2 Am$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m}$$

Termo dois:

$$P_x - K(\tilde{x} - x_e) = 0$$

$$\tilde{x} = \frac{P.Sen\alpha}{K} + x_e$$

O termo um já foi apresentado, se trata da frequência angular ao quadrado. O termo dois será utilizado para obter o valor da constante elástica  $K$  por meio de uma linearização, tornando uma função do tipo  $Y = aX + b$ , temos,  $Y = \tilde{x}$ ,  $A = g.Sen\alpha/K$ ,  $X = m$  e  $B = -x_e$ .

Os valores obtidos pelo Qtiplot através da tabela 3 foram:

- $B = 3,14 \times 10^2$
- $A = 3,50 \times 10^{-2} = 0,0350$

$$Y = AX + B.$$

Sabemos que  $A = g.Sen\alpha/K$ , atribuindo o valor de  $A$  encontrado pelo Qtiplot, temos que  $K$  é igual  $g.Sen\alpha/A$ . Assim,

$$K = \frac{9,8.Sen15^\circ}{0,0350}$$

Dessa forma temos o valor de  $K$  igual a 72,4, e sua unidade é dada por N/m. Portanto,  $K = 72,4 \text{ N/m}$ .

## ANÁLISE DOS RESULTADOS

No experimento analisado foram utilizadas massas cumulativas, então, para cada medição realizada, serão acrescentadas massas à quantidade anterior. Isso permite que se tenham massas maiores e, conseqüentemente, alongamentos maiores. Começamos com um carrinho (sem discos) preso a uma mola sobre um trilho de ar para que não houvesse atrito, conforme a massa foi inserida no sistema, não só o período aumentou como também o ponto de equilíbrio do carrinho, após fazermos duas medições (para ter uma maior certeza da exatidão do sensor) para cada uma das massas aplicadas no sistema foram extraídos os dados para que se pudessem fazer os gráficos necessários para a análise. Tais dados da tabela 1 abaixo, onde  $M_c$  simboliza a massa do carrinho e  $M_d$  a massa dos discos (valor das massas está nos materiais de montagem):

Tabela 1: Variação das diferentes massas com os diferentes períodos.

	$M_c (g)$	$M_c+M_d (g)$	$M_c+2M_d (g)$	$M_c+3M_d (g)$	$M_c+4M_d (g)$	$M_c+5M_d (g)$
$T_1 (s)$	0,317	0,354	0,391	0,423	0,453	0,481
$T_2 (s)$	0,319	0,355	0,391	0,423	0,453	0,481
$T_3 (s)$	0,319	0,356	0,392	0,424	0,453	0,481
$T_4 (s)$	0,319	0,356	0,392	0,424	0,455	0,481
$T_5 (s)$	0,320	0,354	0,393	0,424	0,454	0,482
$T_6 (s)$	0,319	0,352	0,392	0,424	0,454	0,481
$T_7 (s)$	0,320	0,358	0,393	0,424	0,453	0,481
$T_8 (s)$	0,319	0,356	0,392	0,423	0,453	0,481
$T_9 (s)$	0,319	0,357	0,393	0,425	0,454	0,482
$T_{10} (s)$	0,319	0,357	0,392	0,424	0,453	0,481
$T_{resultante}(s)$	0,319	0,355	0,392	0,424	0,454	0,481

Fonte: autoria própria (2018).

Na investigação do sistema massa mola em um plano inclinado utilizando as equações de Newton em conjunto com a lei de Hooke para se achar a constante elástica, observando a variação das diferentes massas presentes no experimento. Conforme o movimento foi analisado verificarmos a dependência da massa com o período, foi notável, o período aumentava de acordo com que a massa fosse adquirida, presente na tabela 1.

Foi observado também que o  $\tilde{x}$  aumentava de acordo com a massa, assim como mostra a tabela 2:

Tabela 2: Variação do ponto de equilíbrio em relação às diferentes massas.

	$M_c (g)$	$M_c+M_d (g)$	$M_c+2M_d (g)$	$M_c+3M_d (g)$	$M_c+4M_d (g)$	$M_c+5M_d (g)$
$x_e (mm)$	320,5	322,0	324,0	325,8	327,8	328,9

Fonte: autoria própria (2018).

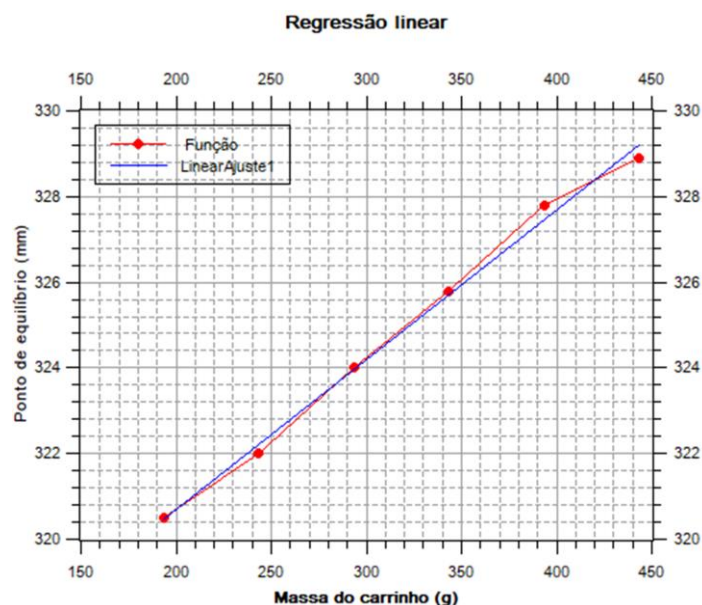
Com base no que foi observado temos uma nova tabela (tabela 3) contendo a variação no novo ponto de equilíbrio em conjunto com o valor da massa no carrinho, e contendo valores utilizados para a regressão linear com um gráfico exposto na figura 2:

Tabela 3: Valores da regressão linear.

$X=M_{\text{carrinho}}(g)$	$Y = \tilde{x} \text{ (mm)}$
193,39	320,5
243,39	322
293,39	324
343,39	325,8
393,39	327,8
443,39	328,9

Fonte: autoria própria (2018).

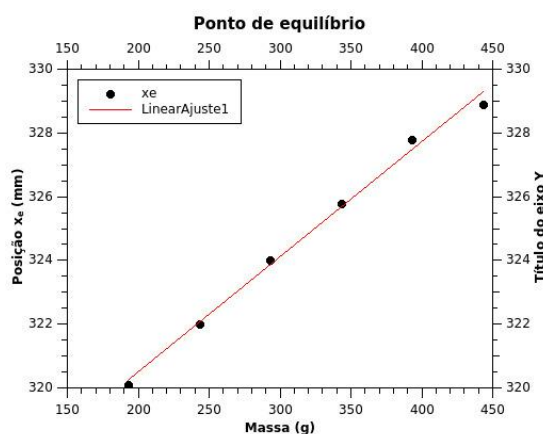
Figura 2: Gráfico da regressão linear.



Fonte: autoria própria (2018).

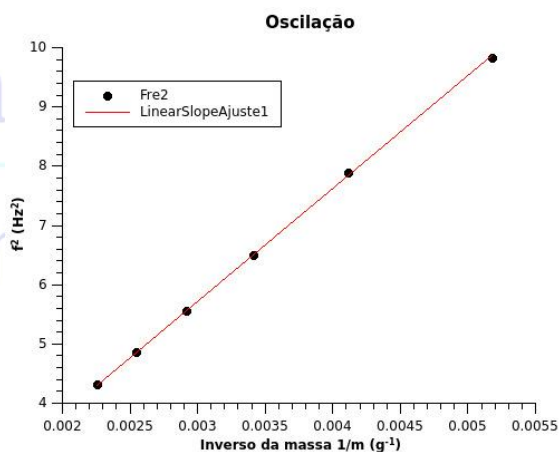
Após obter os dados das tabelas em geral, utilizamos o Qtiplot para construirmos os gráficos presentes neste artigo: da regressão linear da função presente na figura 2; oscilação presente na figura 3; e ponto de equilíbrio presente na figura 4. Como já foi observado na tabela 3 quanto maior a massa maior o ponto de equilíbrio, característica própria do plano inclinado.

Figura 3: Gráfico do ponto de equilíbrio.



Fonte: autoria própria (2018).

Figura 4: Gráfico da Oscilação.



Fonte: autoria própria (2018).



## MATERIAL E MONTAGEM

1 trilho de ar. Presente na fig. 4.

1 carrinho com 193,39 g. Presente na fig. 5.

5 discos de massa igual a 50,0 g. Presente na fig. 6.

1 mola com constante elástica ainda não descoberta. Presente na fig. 5.

1 sensor fotoelétrico para analisar o movimento. Presente na fig. 7.

Imagens:

Figura 5: Trilho de ar.



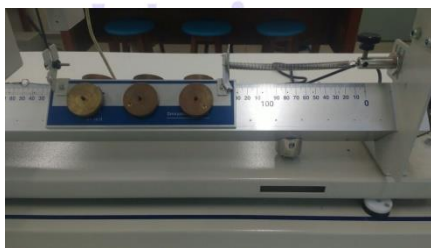
Fonte: autoria própria (2018).

Figura 7: As massas utilizadas.



Fonte: autoria própria (2018).

Figura 6: Carrinho com seis massas posto no sistema massa mola.



Fonte: autoria própria (2018).

Figura 8: Sensor de dados.



Fonte: autoria própria (2018).

## REFERÊNCIAS:

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; E. WALKER, J. Fundamentos da Física: Mecânica. V. 1. 8ª.Ed.- Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos.pg.162, 2009.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; E. WALKER, J. Fundamentos da Física: Mecânica. V. 1. 8ª.Ed.- Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos.pg.222-227, 2009.

NUSSENZVEIG M. Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor. V. 2. 4ª.Ed. – Editora Edgard Bluchar. pg.39-41, 2005.



Universidade Federal  

---

de Campina Grande